Prueba de Bondad y Ajuste: Distribución de Poisson

PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE PARA LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON: RESUMEN

1. Establecer las hipótesis nula y alternativa.

   H_0: La población tiene una distribución de Poisson
   H_a: La población no tiene una distribución de Poisson

2. Tomar una muestra aleatoria y
   a. Para cada valor de la variable aleatoria de Poisson anotar la frecuencia observada f_i.
   b. Calcular el número medio μ de las ocurrencias.
3. Calcular, para cada valor de la variable aleatoria de Poisson, la frecuencia esperada e_i de ocurrencias. Multiplicar el tamaño de la muestra por la probabilidad de su ocurrencia de cada valor de la variable aleatoria de Poisson. Si para algún valor hay menos de cinco ocurrencias esperadas, combinar valores adyacentes y reducir el número de categorías cuanto sea necesario.
4. Calcular el valor del estadístico de prueba.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

5. Regla de rechazo:

Método del valor-p:	Rechazar	H_0 si el valor-$p \leq \alpha$
Método del valor crítico:	Rechazar	H_0 si $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$

donde α es el nivel de significancia y los grados de libertad son $k - 2$.

Ejemplo

Queremos saber si la cantidad de personas que entran a una tienda en un intervalo de 5 minutos sigue una distribución de Poisson.

> H0: La cantidad de clientes que entran en la tienda durante intervalos de 5 minutos tiene una distribución de probabilidad de Poisson
>
> Ha: La cantidad de clientes que entran en la tienda durante intervalos de 5 minutos no tienen una distribución de probabilidad de Poisson

Un empleado de la tienda toma una muestra aleatoria de 128 intervalos de 5 minutos, en las mañanas de tres semanas consecutivas. Durante cada uno de los intervalos de 5 minutos que forman la muestra, el empleado registra el número de llegadas de clientes.

Numero de Clientes	Frecuencia Observada
0	2
1	8
2	10
3	12
4	18
5	22
6	22
7	16
8	12
9	6

¿Pero cuantos clientes esperamos lleguen si la nula es verdadera?

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

Primero hacemos una estimación puntual de μ, la media de la distribución. En este caso $\bar{x} = 5$.

$$f(x) = \frac{5^x e^{-5}}{x!}$$

Numero de Clientes	Clientes Esperados (%)	Clientes Esperados (#)
0	0.67%	0.86
1	3.37%	4.31
2	8.42%	10.78
3	14.04%	17.97
4	17.55%	22.46
5	17.55%	22.46
6	14.62%	18.72
7	10.44%	13.37
8	6.53%	8.36
9	3.63%	4.64
10 o mas	3.18%	4.07
		128.00

Requisito para la prueba de Pearson de bondad y ajuste:

> *Cuando en alguna categoría el número esperado es menor que cinco, no se satisfacen las condiciones para la prueba Chi^2. Cuando esto ocurre, se pueden combinar categorías adyacentes para que el número esperado sea cinco o más.*

Aquí, se combinan 0 y 1 en una sola categoría y también se combinan 9 y "10 o más" en una sola categoría. De esta manera se satisface la regla de un mínimo de cinco como frecuencia esperada en cada categoría.

Numero de Clientes	**Clientes Observados**	**Clientes Esperados**
0 o 1	10	5.17
2	10	10.78
3	12	17.97
4	18	22.46
5	22	22.46
6	22	18.72
7	16	13.37
8	12	8.36
9 o mas	6	8.72
	128.00	128.00

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} = \mathbf{10.96}$$

Al estimar la media perdimos un grado de libertad adicional. De esta forma, nuestro estadístico de prueba se distribuye con $k - 1 - 1 = k - 2 = 9 - 2 = 7$ grados de libertad.

Pvalue =14.04%

MINITAB: Sum(('obs'-'esp')^2/'esp')
